

Компонент ОПОП 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль): Системное программирование и компьютерные технологии
Б1.О.07.01
шифр дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Дисциплины
(модуля)

Математический анализ

Разработчик (и):
Неделько Наталья Станиславовна
ФИО
доцент кафедры ВМиФ
должность

канд. экон. наук
ученая степень,
звание

Утверждено на заседании кафедры
Высшей математики и физики
наименование кафедры
протокол № 6 от 22.03.2024

Заведующий кафедрой _____



подпись

В.В. Левитес
ФИО

1. Критерии и средства оценивания компетенций и индикаторов их достижения, формируемых дисциплиной (модулем)

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора(ов) достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)			Оценочные средства текущего контроля	Оценочные средства промежуточной аттестации
		<i>Знать</i>	<i>Уметь</i>	<i>Владеть</i>		
Компетенция ОПК-1	ИД-1ОПК-1 Использует аппарат фундаментальной математики для решения задач в области профессиональных интересов	основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа, формулировки утверждений, методы их доказательства, их возможные приложения в других областях и в профессиональной сфере;	решать задачи по всем разделам курса, применять теоретический материал; вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы; используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями; применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач;	современными знаниями о математическом анализе и его приложениях; аппаратом математического анализа; методами доказательства утверждений; методами и приемами решения практических задач;	Активность на занятиях Выполнение практических заданий	Итоговая контрольная работа
	ИД-2ОПК-1 Использует фундаментальные математические знания для решения прикладных задач в профессиональной сфере	методы математического анализа, необходимые для решения профессиональных задач	использовать математический аппарат для обработки технической и информации и анализа данных в профессиональной сфере; строить устную и письменную речь логически верно; уметь применять полученные навыки в области профессиональных интересов	методами построения математических моделей типовых профессиональных задач; способностью к обобщению, анализу, постановке цели и выбору путей ее достижения		

2. Оценка уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)

Показатели оценивания компетенций (индикаторов их достижения)	Шкала и критерии оценки уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)			
	Ниже порогового («неудовлетворительно»)	Пороговый («удовлетворительно»)	Продвинутый («хорошо»)	Высокий («отлично»)
Полнота знаний	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущены не грубые ошибки.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки. Допущены некоторые погрешности.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки.
Наличие умений	При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Выполнены типовые задания с не грубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме (отсутствуют пояснения, неполные выводы)	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные задания с некоторыми погрешностями. Выполнены все задания в полном объёме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Задания выполнены в полном объеме без недочетов.
Наличие навыков (владение опытом)	При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для выполнения стандартных заданий с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при выполнении стандартных заданий с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.
Характеристика сформированности компетенции	Компетенции фактически не сформированы. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Зачетное количество баллов не набрано согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков достаточно для решения стандартных профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для решения сложных, в том числе нестандартных, профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону

3. Критерии и шкала оценивания заданий текущего контроля

3.1 Критерии и шкала оценивания практических работ.

Перечень практических работ, описание порядка выполнения и защиты работы, требования к результатам работы, структуре и содержанию отчета и т.п. представлены в методических материалах по освоению дисциплины (модуля).

Оценка/баллы	Критерии оценивания
<i>Отлично</i>	Задание выполнено полностью и правильно. Отчет по лабораторной/практической работе подготовлен качественно в соответствии с требованиями. Полнота ответов на вопросы преподавателя при защите работы.
<i>Хорошо</i>	Задание выполнено полностью, но нет достаточного обоснования или при верном решении допущена незначительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений. Все требования, предъявляемые к работе, выполнены.
<i>Удовлетворительно</i>	Задания выполнены частично с ошибками. Демонстрирует средний уровень выполнения задания на лабораторную/практическую работу. Большинство требований, предъявляемых к заданию, выполнены.
<i>Неудовлетворительно</i>	Задание выполнено со значительным количеством ошибок на низком уровне. Многие требования, предъявляемые к заданию, не выполнены. ИЛИ Задание не выполнено.

Критерии и шкала оценивания контрольной работы

В ФОС включен типовой вариант контрольного задания.

Контрольная работа «Предел числовой последовательности. Предел функции в точке»

Найти области определения следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$; б) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$; в) $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x$.

Найти пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 3n - 5}{1 - n^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{5x}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{3x}$, г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$,

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{9x^2 + 4x - 1}$, е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4}{9x^3 - 2x}$, ж) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{10}{x^2 - 25} \right)$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1а	$(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$
1б	$\left[-\frac{1}{3}; 1 \right]$
1в	$[-5; -\pi) \cup (0; \pi)$

2а	-3
2б	-0,1
2в	$\frac{8}{3}$
2г	$\frac{9}{16}$
2д	$\frac{2}{9}$
2е	0
2ж	$\frac{1}{10}$

Контрольная работа «Техника дифференцирования»

1. Найти производную $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$. 2. Найти производную $y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.
3. Найти производную $y = \ln^3(1+\cos x)$. 4. Найти производную $y = \operatorname{ctg}(\cos 5) - \frac{1}{40} \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.
5. Найти производную $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. 6. Найти производную $y = \frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}$.
7. Найти производную $y = x^{\sin x^3}$. 8. Найти производную $y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{2}}$.
9. Найти производную $y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}$.
10. Найти производную $y = \frac{1}{\sin \alpha} \ln(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg} \alpha)$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ	№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{x}{\sqrt{(1-3x^4)^3}}$	6	$\frac{\operatorname{ch}x(1+\operatorname{ch}x) - \operatorname{sh}^2x}{(1+\operatorname{ch}x)^2}$

2	$1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x}$	7	$x^{\sin x^3} \left(3 \cos(x^3) \cdot x^2 \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$
3	$\frac{-3 \sin x \ln^2(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$	8	$\frac{-48x^2 - 24x + 7}{(16x^2 + 8x + 3)^2}$
4	$\frac{\sin^2 40x + 2 \cos^2 20x \cos 40x}{2 \sin^2 40x}$	9	$\frac{27x^2 + 72x + 36}{(3x + 4)\sqrt{9x^2 + 24x + 12}}$
5	$\frac{-1 - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x^2 + (\sqrt{1+x^2} - 1)^2)}$	10	$\frac{1}{\sin \alpha \cos^2 x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha)}$

Контрольная работа «Применение производной»

Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

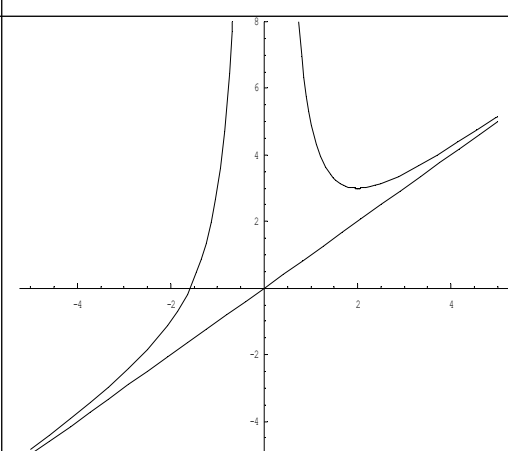
Исследовать функцию $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить ее график.

Найти точки экстремума функции $y = x(x-1)^3$.

Определить возрастание и убывание функции, точки экстремума функции $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$x = 0, y = x + 2$
2	

3	$x = 1$ и $x = \frac{1}{4}$
4	$y' < 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов
5	$f_{\text{наиб.}} = 17$ при $x = -2$, $f_{\text{наим.}} = 0$ при $x = -1$

Контрольная работа «Неопределенный интеграл»

Вычислить $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx$

Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Вычислить применяя формулу интегрирования по частям $\int e^{2x} \cos x dx$.

Вычислить $\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$. Вычислить $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$. Найти интеграл $\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx$.

Вычислить $\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$.

Вычислить используя тригонометрическую подстановку $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{1}{3}x^3 + 2 \cos x + x + C$
2	$\frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C$
3	$e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$
4	$\ln x + \sqrt{x^2 + 2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$
5	$-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$
6	$\frac{7}{6} \ln 36x^2 - 60x + 48 + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C$

7	$3 \ln x+3 - \frac{1}{x^2+2} + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$
8	$\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$

Контрольная работа «Определенный интеграл и его применения»

Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S .

Вычислить $\int_1^2 \frac{x+2}{3-x} dx$. Вычислить $\int_{-1}^0 xe^{-x} dx$. Вычислить $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x-2} dx$

Вычислить $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$. Вычислить $\int_0^\pi (2x + \sin 2x) dx$. Вычислить $\int_0^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x dx$

Ключ

№ задания	Правильный ответ	№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{\pi}{4}$	6	-1
2	$S = \frac{5}{6}$	7	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
3	$S = 2\pi r$	8	$\frac{1}{2} \ln 7$
4	$V = \frac{1}{3} SH$	9	π^2
5	$5 \ln 2 - 1$	10	$\frac{1}{\ln 10}$

Контрольная работа «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»

Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

$$z = \frac{y}{x^2 - y^2}.$$

Найти полный дифференциал функции

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке $M(1; 1; 1)$.

4. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1, y = 2, z = 1$.

5. Найти экстремум функции $f(x; y) = xy$, если уравнение связи: $2x + 3y - 5 = 0$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2 x^{y^2 z} y z \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$
2	$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)} dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy$
3	$x - 2y + z = 0, \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$
4	$du \approx 1,05$
5	$\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$

Контрольная работа «Числовые и функциональные ряды»

Если $f(x) = x^3 - 1$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ равен...

а) 1; б) 0,25; в) 0; г) 3.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 10, тогда интервал сходимости имеет вид...

а) $(0; 10)$; б) $(-10; 10)$; в) $[-5; 5]$; г) $(-10; 0)$.

3. Второй член a_2 числовой последовательности $a_n = \frac{2^{2n-1}}{2n}$ равен ...

4. Установите соответствие между рядами и их названиями.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n + 3}$.

а) знакочередующийся; б) знакоположительный; в) степенной.

5. Укажите сходящиеся числовые ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

6. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

7. Определить область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

Ключ

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Правильный ответ	в	б	2	1-б, 2-а, 3-в	1 и 4	сходится	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Контрольная работа «Кратные интегралы. Криволинейные интегралы»

Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (x-y) dx dy$, если область Δ ограничена линиями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.

Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy$, если область Δ ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$, $y = 2$.

Вычислить двойной интеграл $\iint_{\Delta} y \ln x dx dy$, если область интегрирования ограничена линиями $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

Вычислить интеграл $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{xy} x^2 yz dz dy dx$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ и плоскостью ХОУ.

Ключ

№ задания	Правильный ответ	№ задания	Правильный ответ
1	0,8	5	$\frac{1}{104}$
2	5	6	$21\frac{1}{3}$
3	$\frac{244}{21}$	7	$V = 3\pi$
4	$\frac{5 \ln 2}{4} - \frac{5}{8}$		

Оценка/баллы	Критерии оценивания
<i>Отлично</i>	Работа выполнена полностью, без ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием непонимания материала).
<i>Хорошо</i>	Работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна негрубая ошибка или два-три недочета, не влияющих на правильную последовательность рассуждений.
<i>Удовлетворительно</i>	В работе допущено более одной грубой ошибки или более двух-трех недочетов, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.
<i>Неудовлетворительно</i>	В работе есть грубые ошибки и недочеты ИЛИ Контрольная работа не выполнена.

4. Критерии и шкала оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю) при проведении промежуточной аттестации

Критерии и шкала оценивания результатов освоения дисциплины (модуля) с экзаменом

Для дисциплин (модулей), заканчивающихся экзаменом, результат промежуточной аттестации складывается из баллов, набранных в ходе текущего контроля и при проведении экзамена:

В ФОС включены примерные вопросы к коллоквиумам, экзамену, зачету по темам курса:

Примерные вопросы к коллоквиумам, зачетам и экзамену

1) Введение в математический анализ.

1. Множества и основные операции над ними.
2. Отображения множеств и их виды.
3. Вещественные числа. Простейшее назначение вещественных чисел. Доказательство того, что диагональ единичного квадрата не может быть измерена рациональным числом. Замечания 1 – 4. Свойства 1-16 вещественных чисел.
4. Целая и дробная части числа. Абсолютная величина числа. Утверждения 1, 2, 3 (Представление вещественных чисел в виде бесконечной десятичной дроби), определения 2-7.
5. Определения ограниченного сверху (снизу) множества, ограниченного множества. Верхняя (нижняя) грань множества. Утверждение 1. Точная верхняя (нижняя) множества. Свойства точных верхней и нижней граней множества. Лемма 1.
6. Свойство полноты множества вещественных чисел (формулировка и доказательство).
7. Леммы об отделимости множеств, о системе вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков.
8. Неравенство Бернулли. Числовые последовательности (Определение последовательности, примеры, операции над числовыми последовательностями, ограниченные сверху (снизу), ограниченные последовательности, определения бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей, примеры).
9. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей (теоремы 1-5 и следствия из них), доказательства того, что $\{q^n\}$ и $\{nq^n\}$ - бесконечно малые последовательности при $|q| < 1$.
10. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
11. Предельный переход в неравенствах. Примеры: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
12. Определение монотонных последовательностей. Теорема Вейерштрасса (теоремы 1 и 2).

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
13. Число e (Теоремы 3 и 4 с доказательством). Последовательность $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Оценка для $r_n = e - a_n$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Оценка для $r_n = e - c_n$, где $c_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n!}$.
14. Иррациональность числа e (теорема 5). Постоянная Эйлера (теорема 6). Алгебраические и трансцендентные числа.
15. Определение подпоследовательности и частичного предела. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы. Существование верхнего и нижнего пределов для ограниченной последовательности.
16. Критерий Коши для сходимости последовательности. Пример.
17. Понятие предела числовой функции (определения отображения, функции, проколотой δ -окрестности, предела по Коши и по Гейне).
18. База множеств. Предел функции по базе. Примеры баз. Доказательство, что совокупности множеств B_0, B_1, \dots, B_6 удовлетворяют определению базы. Определение ограниченной и финально ограниченной функции.
19. Свойства пределов функции по базе (утверждения 1 – 3 § 12).
20. Свойства пределов функции по базе (утверждения 4 – 7 § 12).
21. Переход к пределу в неравенствах.
22. Критерий Коши существования предела функции по базе.
23. Эквивалентность определений сходимости по Коши и по Гейне.
24. Теоремы о пределе сложной функции (определение сложной функции, теоремы 1 и 2).
25. Теоремы о пределе сложной функции (определение сложной функции, теоремы 3 и 4, примеры).

26. Порядок бесконечно малой функции.
27. Свойства функций, непрерывных в точке.
28. Непрерывность функций $y = a^x$, $y = \sin x$.
29. Замечательные пределы.
30. Непрерывность функции на множестве (определения функции, непрерывной на множестве, на отрезке, неубывающей, невозрастающей, строго возрастающей, строго убывающей, монотонной функции, определение точек разрыва, теорема 1 (о точках разрыва монотонной функции на отрезке)).
31. Непрерывность функции на множестве (теорема 2 (критерий непрерывности монотонной функции), теорема 3 (об обратной функции)).
32. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке (теорема об обращении функции в нуль, теорема о промежуточном значении непрерывной функции).
33. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке (теорема об ограниченности непрерывной функции, теорема о достижении непрерывной функцией точных верхней и нижней границ).
34. Понятие равномерной непрерывности. Теорема Гейне – Кантора.
35. Свойства замкнутых и открытых множеств (определения замкнутого и открытого множества, утверждения 1 и 2).

2) Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Приращение функции. Дифференциал и производная функции. Геометрический и механический смысл производной. Связь понятий дифференцируемости и непрерывности функции. Односторонние производные.
2. Дифференцирование сложной функции.
3. Теорема о производной обратной функции, теорема об инвариантности формы первого дифференциала.
4. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций.
5. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
6. Дифференциалы высших порядков. Доказательство неинвариантности формы второго дифференциала.
7. Производная функции, заданной параметрически. Примеры функций, заданных параметрически. Производная функции, заданной неявно.
8. Возрастание и убывание функции в точке. Локальные экстремумы. Лемма Дарбу.
9. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа. Следствия.
10. Точки несобственного локального экстремума, теорема Ферма, теорема 4 (еще одна теорема об обращении в нуль производной), теорема 5 (о невозможности для производной иметь точки разрыва первого рода), следствие (теорема Дарбу), бесконечные производные.
11. Следствия из теоремы Лагранжа.
12. Раскрытие неопределенностей. Первое правило Лопиталья и следствия из него.
13. Раскрытие неопределенностей. Второе правило Лопиталья и следствия из него.
14. Локальная формула Тейлора.
15. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха – Роша)(случай $a < b$).
16. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха – Роша)(случай $a \geq b$). Частные случаи формулы Тейлора.
17. Применение формулы Тейлора к некоторым функциям.
18. Исследование функций с помощью производных. Экстремальные точки. Достаточные условия достижения функцией локального экстремума в заданной точке.
19. Исследование функций с помощью производных. Выпуклость. Условия выпуклости функции.
20. Точки перегиба. Условия перегиба. Общая схема построения графика функции. Пример.

3) Неопределенный интеграл

1. Точная первообразная. Интегрируемые функции.
2. Свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования (замена переменной интегрирования, интегрирование по частям). Таблица интегралов (с доказательствами).
3. Интегрирование дробно-рациональных функций (выделение правильной рациональной дроби, разложение правильной рациональной дроби на простейшие, метод неопределенных

коэффициентов, интегрирование правильных рациональных дробей). Метод Остроградского. Примеры.

4. Интегрирование дробно-рациональных функций (интегрирование простейших рациональных дробей вида I – IV, рекуррентная формула).

5. Интегрирование тригонометрических выражений и выражений вида $R(e^x)$.
6. Интегрирование иррациональных выражений.

4) Определенный интеграл Римана и его приложения

1. Определение интеграла Римана (неразмеченное разбиение, его свойства, диаметр разбиения, размеченное разбиение, интегральная сумма, определение интеграла Римана, определение функции интегрируемой по Риману, единственность интеграла Римана, интеграл Римана как предел по некоторой базе, ограниченность интегрируемой по Риману функции).
2. Критерий интегрируемости функций по Риману (определения сумм Дарбу, верхнего и нижнего интегралов, леммы 1-6, критерий и его доказательство, примеры про функции Дирихле и Римана).
3. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману.
4. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману. Следствие из него.

$$1) \int_a^b e^x dx = e^b - e^a, \quad 2) \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

5. Метод интегральных сумм. Лемма. Примеры:

$$(0 < a < b); \quad 3) \text{ Найти предел } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$$

6. Классы функций интегрируемых по Риману (Теоремы 1-3).
7. Свойства определенного интеграла (Утверждения 1-6).
8. Свойства определенного интеграла (Утверждения 7-9, Теорема об интегрируемости сложной функции).
9. Аддитивность интеграла Римана (теорема, следствие из нее).
10. Интеграл Римана как функция от его верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла. (Теоремы 1 и 2).
11. Теорема Ньютона – Лейбница.
12. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. (Теоремы 1 и 2).
13. Примеры на формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле (примеры 1-9, замечания 1-3).
14. Первая теорема о среднем значении интеграла (теорема 1, следствия 1-3).
15. Вторая теорема о среднем значении интеграла (теорема 2).
16. Вторая теорема о среднем значении интеграла (теорема 3, следствие, пример, теорема 4).
17. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (определение множества, имеющего лебегову меру нуль, утверждения 1 и 2, критерий Лебега (только формулировка), применения (теоремы 2 и 3 с доказательствами)).
18. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (формулировка и доказательство, лемма 1).
19. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (другая его формулировка, лемма 2 и теорема).

20. Определение несобственных интегралов первого и второго рода. Примеры: 1) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^a}, \quad a > 0;$

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

- 2) 0.
21. Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов. (Теоремы 1 и 2).
22. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

23. Несобственные интегралы второго рода (основные определения и свойства). Пример:
24. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле.
25. Кривые в многомерном пространстве.
26. Теорема о длине дуги кривой. Следствие. Пример: вычисление длины дуги циклоиды.
27. Площадь плоской фигуры и объем тела. Определение меры Жордана.
28. Критерий измеримости множества по Жордану.
29. Свойства меры Жордана.
30. Измеримость спрямляемой кривой. (Лемма, теорема, следствие).
31. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
32. Геометрические приложения определенного интеграла (Площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейного сектора.). Примеры.
33. Геометрические приложения определенного интеграла (Длина дуги кривой). Примеры.
34. Геометрические приложения определенного интеграла (Площадь поверхности вращения). Примеры.
35. Геометрические приложения определенного интеграла (Объем тела). Примеры.
36. Физические приложения определенного интеграла (Центр тяжести кривой. 1-ая теорема Гульдена.) Примеры.
37. Физические приложения определенного интеграла (Центр тяжести криволинейной трапеции. 2-ая теорема Гульдена. Работа переменной силы.) Примеры.

5) Дифференциальное исчисление ФНП

1. Понятие функции n переменных. Основные определения и понятия.
2. Непрерывные функции в \mathbb{R}^n .
3. Дифференцируемые функции в \mathbb{R}^n .
4. Дифференцирование сложной функции. Примеры.
5. Производная по направлению. Градиент. Примеры.
6. Геометрический смысл дифференциала. Примеры.
7. Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца и Юнга. Примеры.
8. Дифференциалы высших порядков. Пример. Невыполнение свойства инвариантности формы для 2-го дифференциала.
9. Формула Тейлора. Пример.
10. Локальный экстремум функции многих переменных (Основные определения, необходимое условие экстремума, определение квадратичной формы, положительная (отрицательная) определенность квадратичной формы, критерий Сильвестра). Примеры.
11. Локальный экстремум функции многих переменных (Регулярная точка, достаточное условие экстремума, достаточные условия строгого экстремума функции двух переменных, примеры). Наибольшее и наименьшее значения функции на компакте. Примеры.
12. Неявные функции. Примеры.
13. Система неявных функций. Примеры.
14. Условный экстремум функции многих переменных. Примеры.
15. Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби. Примеры.

6) Кратные интегралы

1. Определение и условия существования двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
2. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольной области). Пример.
3. Сведение двойного интеграла к повторному (случай криволинейной области). Пример.
4. Замена переменных в двойном интеграле. Примеры.
5. Геометрические приложения двойных интегралов (вычисление площади фигуры, объема тела и площади поверхности). Примеры.
6. Физические приложения двойного интеграла (вычисление массы материальной пластинки, вычисление координат центра масс и моментов инерции пластинки). Примеры.

7. Определение и вычисление тройных интегралов. Примеры.
8. Замена переменных в тройном интеграле. Примеры.
9. Приложения тройных интегралов. Примеры.

7) Криволинейные и поверхностные интегралы

1. Определение криволинейного интеграла первого рода.
2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Примеры.
3. Определение криволинейных интегралов второго рода, сведение их к определенным интегралам.
4. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода. Примеры.
5. Формула Грина. Пример.
6. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
7. Интегрирование полных дифференциалов. Примеры.
8. Некоторые приложения криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Примеры.

8) Числовые и функциональные ряды

1. Числовые ряды (основные определения, утверждение 1 (об остаточном члене ряда)).

Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; 2) $a + aq + \dots + aq^n + \dots$, $a \neq 0$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

5. Числовые ряды (утверждение 2 (отбрасывание любого конечного числа членов ряда), утверждения 3, 4, утверждение 5 (необходимый признак сходимости ряда)).

Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$.

6. Числовые ряды (Теорема 1 (критерий Коши), теорема 2 (критерий Коши для расходимости

ряда)). Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

7. Ряды с неотрицательными членами (определения, теорема 1 (ограниченность последовательности частичных сумм), признаки сравнения (теоремы 2, 3, следствие из теоремы 2)).
8. Признак Даламбера (теоремы 4, 5).
9. Признак Коши (теоремы 6, 7).

10. Признак Раабе (теоремы 1, 2(с доказательствами)). Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.
11. Признаки Куммера, Бертрана, Гаусса (без доказательства).

12. Интегральный признак Коши – Маклорена (с доказательством). Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

13. Абсолютная и условная сходимость рядов.

14. Ряды Лейбница. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда Лейбница.

15. Формула дискретного преобразования Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$$

16. Перестановки членов ряда. Арифметические операции над сходящимися рядами. Двойные и повторные ряды.

17. Функциональные последовательности и ряды (основные определения). Разложения различных функций по формуле Тейлора как примеры функциональных рядов.

18. Ряд Тейлора. Равномерная сходимость (Определения, теорема 1 (о непрерывности суммы ряда в точке)). Равномерно ограниченные на множестве последовательности. Утверждения 1-4.

19. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности (критерий Коши и

его отрицание). Примеры: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$, $x \in [0, 2)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in (0, 1)$.

20. Признаки равномерной сходимости (критерий равномерной сходимости для бесконечно малой функциональной последовательности, определение мажоранты, признак Вейерштрасса, признаки Абеля и Дирихле). Теорема Дини и следствие из нее.
21. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда (теоремы 1,2 (с доказательством), теорема 3 (без доказательства)). Степенные ряды (основные определения, теоремы 1, 2, 5 (с доказательствами), теоремы 3, 4, 6 (без доказательства)). Бесконечные произведения.

Критерии и шкала оценивания коллоквиума

Оценка/баллы	Критерии оценки
<i>Отлично</i>	Полный, развернутый ответ на поставленный вопрос (вопросы). Свободно оперирует понятиями. Глубокое усвоение программного материала, а также последовательные, грамотные ответы. Свободное владение материалом, правильное обоснование принятых решений.
<i>Хорошо</i>	Полный, развернутый ответ на поставленный вопрос (вопросы). В ответе прослеживается четкая структура, логическая последовательность. Усвоение программного материала, грамотное и последовательное его изложение, но допущены несущественные неточности в определениях.
<i>Удовлетворительно</i>	Недостаточно развернутый и последовательный ответ на поставленный вопрос (вопросы). Владение знаниями только по основному материалу. Допущены неточности и затруднения с формулировкой определений.
<i>Неудовлетворительно</i>	Неполный ответ, разрозненные знания по теме вопроса с существенными ошибками в раскрытии понятий, употреблении терминов. Присутствует нелогичность изложения. Владение материалом частичное, только относительно к заданным вопросам. Отсутствуют выводы, конкретизация и доказательность изложения. ИЛИ Не получены ответы по базовым вопросам дисциплины.

Критерии и шкала оценивания экзамена

Оценка	Критерии оценки ответа на экзамене
<i>Отлично</i>	Обучающийся глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, не затрудняется с ответом при видоизменении вопроса. Владеет специальной терминологией, демонстрирует общую эрудицию в предметной области, использует при ответе ссылки на материал специализированных источников, в том числе на Интернет-ресурсы.
<i>Хорошо</i>	Обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, владеет специальной терминологией на достаточном уровне; могут возникнуть затруднения при ответе на уточняющие вопросы по рассматриваемой теме; в целом демонстрирует общую эрудицию в предметной области.
<i>Удовлетворительно</i>	Обучающийся имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, плохо владеет специальной терминологией, допускает существенные ошибки при ответе, недостаточно ориентируется в источниках специализированных знаний.
<i>Неудовлетворительно</i>	Обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеет специальной терминологией, не ориентируется в источниках специализированных знаний. Нет ответа на поставленный вопрос.

Оценка, полученная на экзамене, переводится в баллы («5» - 20 баллов, «4» - 15 баллов, «3» - 10 баллов) и суммируется с баллами, набранными в ходе текущего контроля.

Итоговая оценка по дисциплине (модулю)	Суммарные баллы по дисциплине (модулю), в том числе	Критерии оценивания
<i>Отлично</i>	91 - 100	Выполнены все контрольные точки текущего контроля на высоком уровне. Экзамен сдан
<i>Хорошо</i>	81-90	Выполнены все контрольные точки текущего контроля. Экзамен сдан
<i>Удовлетворительно</i>	70- 80	Контрольные точки выполнены в неполном объеме. Экзамен сдан
<i>Неудовлетворительно</i>	69 и менее	Контрольные точки не выполнены или не сдан экзамен

Критерии и шкала оценивания результатов освоения дисциплины (модуля) с зачетом

Если обучающийся набрал зачетное количество баллов согласно установленному диапазону по дисциплине (модулю), то он считается аттестованным с оценкой согласно шкале баллов для определения итоговой оценки:

Оценка	Баллы	Критерии оценивания
<i>Отлично</i>	91 - 100	Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону
<i>Хорошо</i>	81 - 90	Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону
<i>Удовлетворительно</i>	60 - 80	Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону
<i>Неудовлетворительно</i>	менее 60	Зачетное количество согласно установленному диапазону баллов не набрано

5. Задания диагностической работы для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю) в рамках внутренней и внешней независимой оценки качества образования

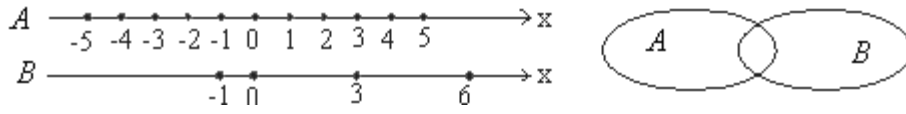
ФОС содержит задания для оценивания знаний, умений и навыков, демонстрирующих уровень сформированности компетенций и индикаторов их достижения в процессе освоения дисциплины (модуля).

Комплект заданий разработан таким образом, чтобы осуществить процедуру оценки каждой компетенции, формируемых дисциплиной (модулем), у обучающегося в письменной форме.

Содержание комплекта заданий включает: *расчетные задачи*.

Примерные задания диагностической работы

<i>Код и наименование компетенции</i> ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	
1	Даны множества: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$, $B = \{0; -1; 6; 3\}$; 1) перечислите множество А списком его элементов, изобразите множества А и В диаграммой Эйлера-Венна и точками на координатной прямой;

	<p>2) запишите для данных множеств их объединение, пересечение, разности и симметричную разность.</p> <p>Решение:</p> <p>1) $A = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5\};$</p> <p>2) $B = \{-1; 3; 6\}$</p>  <p>$A \cup B = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; 6\}, A \cap B = \{0; -1; 3\}, A \setminus B = \{1; \pm 2; -3; \pm 4; \pm 5\},$ $B \setminus A = \{6\}, A \oplus B = \{1; \pm 2; -3; \pm 4; \pm 5; 6\}.$</p>
2	<p>Область определения функции</p> $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2 + 5x + 4}$ <p>Область определения функции имеет вид</p> <p>Решение: Данная функция определена, если подкоренное выражение в числителе неотрицательно, а знаменатель не равен нулю. Тогда</p> $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x^2 + 4x + 5 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq -4, x \neq -1. \end{cases}$ <p>Следовательно, получаем, что $x \in [-3, -1) \cup (-1, +\infty).$</p>
3	<p>Вычислите пределы</p> <p>1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 4n + 1}{8n^2 - 5n + 3};$ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 4}}{n + 1} \right);$ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n^2 - 2};$</p> <p>4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)! - (3n)!}{(3n+1)!};$ 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n^2+1});$</p> <p>Ответы:</p> <p>1) $\frac{5}{8};$ 2) 0; 3) $+\infty;$ 4) 1; 5) $-\infty$</p>
4	<p>Производные высших порядков</p> <p>Производная второго порядка функции $y = \sin(4x^2 - 1)$ равна ...</p> <p>Решение: Вычислим производную первого порядка:</p> $y' = (\sin(4x^2 - 1))' = \cos(4x^2 - 1) \cdot (4x^2 - 1)' = 8x \cos(4x^2 - 1).$ <p>Тогда производная второго порядка вычисляется как производная от производной первого порядка, то есть</p> $y'' = (y')' = (8x \cos(4x^2 - 1))' = 8 \left(x' \cos(4x^2 - 1) + x (\cos(4x^2 - 1))' \right) =$ $= 8(\cos(4x^2 - 1) - 8x^2 \sin(4x^2 - 1)).$
5	<p>Частные производные первого порядка</p> <p>Значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \sin \frac{x}{y^2}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$ равно ...</p> <p>Решение: При вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ по переменной y переменную x рассматриваем как постоянную величину. Тогда</p>

	$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin \frac{x}{y^2} \right)'_y = \cos \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y^2} \right)'_y = -\frac{2x}{y^3} \cos \frac{x}{y^2}.$ $\frac{\partial z(M)}{\partial y} = -\frac{2 \cdot \frac{\pi}{3}}{1^3} \cos \frac{\pi}{1^2} = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}.$
6	<p>Основные методы интегрирования</p> $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ <p>Множество первообразных функции имеет вид ...</p> <p>Решение:</p> <p>Чтобы определить множество первообразных, вычислим неопределенный интеграл от этой функции. Разложив знаменатель дробно-рациональной функции на линейные множители, получаем</p> $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$ $= \ln x+1 - \ln x+2 + C = \ln \left \frac{x+1}{x+2} \right + C.$
7	<p>Сходимость числовых рядов</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n}{12^n}$ <p>Сумма числового ряда равна ...</p> <p>Решение: Представим общий член этого ряда в виде суммы</p> $a_n = \frac{3^n - 4^n}{12^n} = \left(\frac{1}{4} \right)^n - \left(\frac{1}{3} \right)^n = b_n - c_n.$ <p>Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ представляют собой бесконечно убывающие геометрические прогрессии. Следовательно, эти ряды сходятся,</p> $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3};$ <p>причем</p> $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}.$ <p>Таким образом, сумма данного числового ряда</p> $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$ <p>равна:</p>

Оценка/баллы	Критерии оценки
<i>Отлично</i>	90-100 % правильных ответов
<i>Хорошо</i>	70-89 % правильных ответов
<i>Удовлетворительно</i>	50-69 % правильных ответов
<i>Неудовлетворительно</i>	49% и меньше правильных ответов